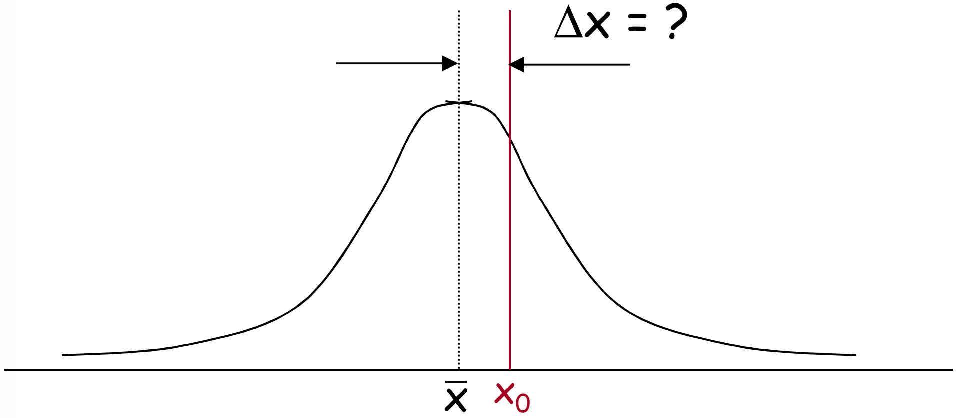
# Cours no.2.
# Incertitudes.



# Estimation de l'incertitude.

L'estimation d'une incertitude de mesure
sert à apprécier la "fiabilité" d'un résultat.

- quantifier la qualité du résultat annoncé;
- déclarer la conformité à des spécifications;
- comparer des produits.

**QUALITE**

Ensemble des propriétés et caractéristiques d'une entité qui lui confère l'aptitude à satisfaire des besoins, exprimés ou implicites.

**(Norme ISO 8402 : 1994)**

# Mesurande, mesurage, incertitude:

**mesurande**

grandeur physique soumise au mesurage.
attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance qui est susceptible d'être distingué qualitativement et déterminé quantitativement.

**mesurage**

ensemble des opérations ayant pour but de déterminer la valeur d'un mesurande:

- définition d'un mesurande;
- définition du principe (base scientifique) du mesurage;
- définition de méthode de mesure et du mode opératoire;
- définition des grandeurs d'influence;
- estimation d'incertitude du résultat de mesure.

**incertitude**

paramètre, associé au résultat d'un mesurage qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mésurande.

# Definition d'incertitude.

L'incertitude, c'est la différence entre:

- la vraie valeur (exacte ou conventionnellement vraie) de la grandeur physique dans les conditions d'expérience, et
- le résultat du mesurage:

$$\Delta x = |x_0 - x|$$

$X_0$ – vraie valeur d'une grandeur physique, jamais connue à cause de:

- multitude de facteurs d'influence non contrôlés durant un mesurage;
- les lois physiques (p.ex. l'indétermination de Heisenberg, $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$)

valeur conventionnellement vraie - valeur d'une grandeur physique qui peut être substituée à la valeur vraie dans un but donné.

# Notations d'incertitude.

**incertitude absolue** $\Delta x$ ne permet pas d'évaluer la qualité de l'estimation de $x_0$ si on ne connaît pas $x_0$

**incertitude relative** $\dfrac{\Delta x}{x}$ représente la qualité (précision) de mesure (nombre sans dimension !)

**EXEMPLE:** comparer :

1) une règle de longueur **1 m** mesurée **à 1 mm près**

$x = 1\ \text{m} \Rightarrow$ | $\Delta x = 1\ \text{mm}$, $\Delta x/x = 0.001$

2) une tige de longueur **10 mm** mesurée **à 0.1 mm près**

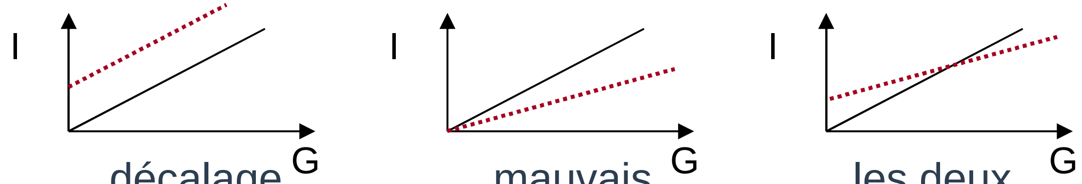
$x = 10\ \text{mm} \Rightarrow$ | $\Delta x = 0.1\ \text{mm}$, $\Delta x/x = 0.01$

# Incertitudes systematiques (biais):

dues à un défaut (reproductible) d'un instrument ou de la méthode de mesure utilisée.

**defaut d'instrument**

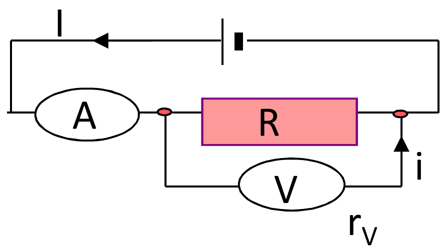
**EXEMPLE** : I – valeur mesurée de la grandeur G




décalage du zéro | mauvais étalonnage | les deux à la fois

**defaut de la methode**

**EXEMPLE :** Mesure de la résistance avec un montage en aval:




valeur experimentale $\longrightarrow R_{exp} = \dfrac{U}{I}$

valeur vraie $\longrightarrow R = \dfrac{U}{I-i} = \dfrac{R_{exp} \cdot r_V}{r_V - R_{exp}}$

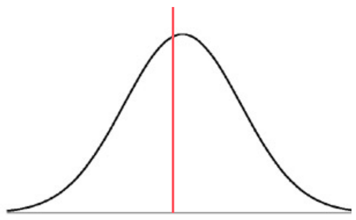
**defaut du mode operatoire**

**EXEMPLE :** erreur de parallaxe

# Incertitudes aléatoires.

- provienent des variations non-prévisibles de grandeurs d'influence (condition du mesurage)

- elles sont responsable de la distribution des résultats du mesurage autour la valeur $x_0$




- leur évaluation est régie par les lois statistiques;
- on peut diminuer cette composante en augmentant le nombre des mesures effectues;
- pour un nombre infini d'expériences espérance mathématique d'incertitude aléatoire est égale à zéro)

**Incertitudes parasites** – elles proviennent d'un incident isolé dans le temps.

D'habitude, une mesure entachée d'une incertitude parasite se distingue facilement d'autres points expérimentaux.

# Estimation d'incertitude de type A.

Incertitude de type A: est liée à la répétabilité et reproductibilité des mesures

**répétabilité** — étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs dans les mêmes conditions de mesure.

**reproductibilité** — étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs dans les conditions de mesure variées

↓

évaluation statistique de validité de mesurages,
basée sur une série d'observations.

Eléments indispensables d'estimation de type A: temps et argent

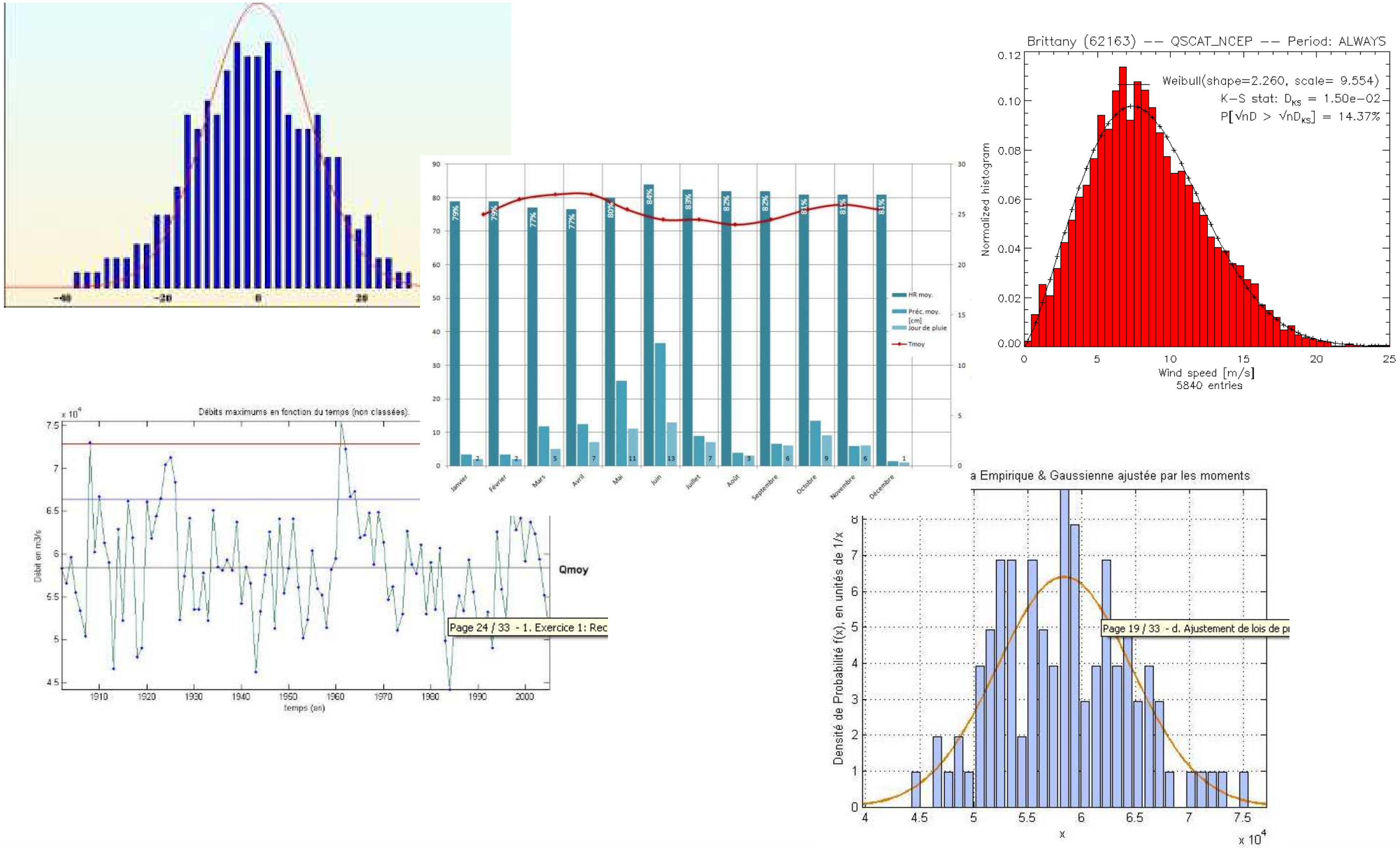
# Estimation d'incertitude de type B.

Son évaluation, scientifique mais personnelle,
doit utiliser toutes les informations possibles
sur les causes de la variation de détermination du mesurande:

- résultats des mesurages antérieurs;
- propriétés des matériaux et instruments utilises;
- données d'étalonnage;
- incertitudes sur les données de référence:
- ……….

Eléments indispensables d'estimation de type B: expérience et
compétence technique

# Estimation d’incertitude de type A.

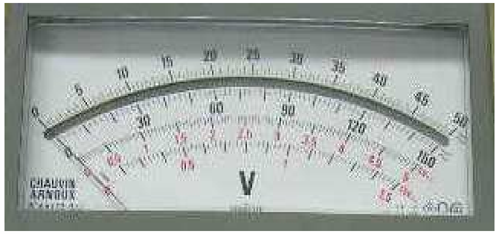


# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDEURS DIRECTES

### MESURE INDIVIDUELLE

**EXEMPLE 1 :** appareil analogique.



Mesure d'une tension avec un voltmètre de classe 1.5% sur le calibre 100 mV comportant 100 divisions. L'aiguille tombe entre les graduations 22 et 23.

- **incertitude de lecture:**

  $22 < x < 23 \quad \rightarrow x = 22.5 \pm 0.5$ mV

  $\Delta x_{lect} = 0.5$ mV

- **incertitude de l'appareil:**

  $\Delta x_{app} = 1.5\% \times 100$ mV $= 1.5$ mV

**incertitude totale:**

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{lec})^2 + (\Delta x_{app})^2} =$$

$$= \sqrt{(0.5)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{0.25 + 2.25} = \sqrt{2.5} \cong 1.58$$

$x = 22.5 \pm 1.6$ mV

# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDERURS DIRECTES

### MESURE INDIVIDUELLE

**EXEMPLE 2 :** appareil numérique.


Mesure d'un signal de 2 V sur un voltmètre numérique à 3 digits, sur le calibre de 100 V.

Si l'appareil indique le chiffre 2, alors

$$1.5000....01 < x < 2.499999....$$

$$x = (2 \pm 0.5)\ \text{V}$$

**A retenir:**

S'il n'y a pas d'autres indications, l'incertitude d'une mesure individuelle est égale à la moitié de la plus petite graduation de l'instrument de mesure sur le calibre choisi.

# Estimation d'incertitude de type A.

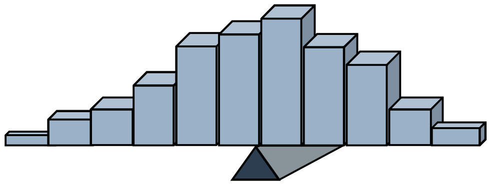
## GRANDERURS DIRECTES

SERIE DE n OBSERVATIONS IDEPENDANTES (n grand, mais limité)

**EXEMPLE 1 :** Soit une série des n mesures $x_1$, $x_2$, $x_3$,....$x_n$.

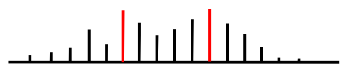
- **estimation de $x_0$** = espérance mathématique de x =
  = **moyenne arithmétique**

$$x_0 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$



Quand la moyenne arithmétique ne peux pas être estimée, on peut lui substituer:

- **modale** – la fréquence de son apparition est maximale



- **médiane** – partage la série en deux parties d'effectifs égaux.

# Estimation d'incertitude de type A.

GRANDERURS DIRECTES

SERIE DE n OBSERVATIONS IDEPENDANTES (n grand, mais limité)

**EXEMPLE 1 :** Soit une série des n mesures $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

- **estimation de l'incertitude $\Delta x$** = dispersion de valeurs autour de la valeur moyenne

  - **variance** - moyenne des carrés des écarts de valeurs $x_i$ de la valeur moyenne :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2$$

  - **écart type** - mesure l'écartement de $x_i$ par rapport à la valeur moyenne; en métrologie, il est assimilé à l'incertitude d'une série des mesures :

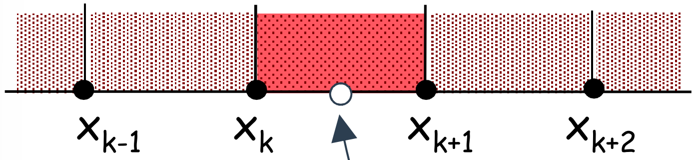
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \sim \Delta x$$

# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDERURS DIRECTES

SERIE DE n OBSERVATIONS IDEPENDANTES (n limité, mais très grand)

on répartit les valeurs en classes.




centre d'une classe :

- on ne distingue pas des valeurs inscrites dans la même classe ;
- à chaque observation est attribuée une valeur unique, correspondant au centre de sa classe :

$$x_{centre} = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}$$

# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDERURS DIRECTES

SERIE DE n OBSERVATIONS IDEPENDANTES (n limité, mais très grand)

Donc, on ramène le problème à celui d'une série des n mesures :
$X_{(centre)1}$, $x_{(centre)2}$, $x_{(centre)3}$,.... $X_{(centre)n}$ où chaque valeur $(x_{centre})_i$ apparaît $n_i$ fois.

- **estimation de $x_0$** (la vrai valeur de x) = espérance mathématique de x =
  = moyenne arithmétique

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_{(centre)i}$$

- **estimation de $\Delta x$** (l'incertitude de x) = écart-type de x =

$$V(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_{(centre)i} - \bar{x})^2$$

$$\Delta x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{f_i (x_{(centre)_i} - \bar{x})^2}$$

# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDERURS DIRECTES

k SERIES DE n OBSERVATIONS

Si on effectue k séries, chacune de n mesures de la grandeur x,
le meilleur estimateur de la dispersion de l'ensemble de ces mesures
est la variance expérimentale de la moyenne de series:

$$\left.\begin{array}{ll}
x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots x_{1n} & \rightarrow \overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} \\
x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots x_{2n} & \rightarrow \overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} \\
x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots x_{3n} & \rightarrow \mathbf{x}_{\mathbf{3}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, \ldots x_{kn} & \rightarrow \mathbf{x}_{\mathbf{k}}
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x_0 = \bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \cdot n$$

$$\Delta x = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{k(k-1)}\sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - x_0)^2 n}$$

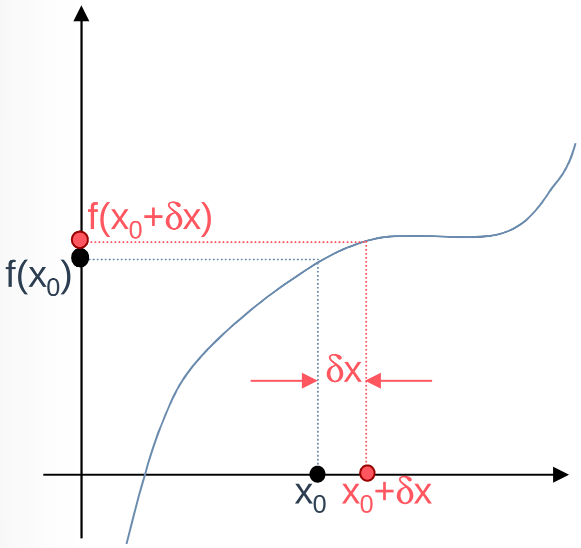
Lucyna FIRLEJ

# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDERURS INDIRECTES

### Fonction d'une seule variable: y = f(x)

Soit f - grandeur physique dépendant d'une seule grandeur mesurée x.
Dans l'intervalle ($x_0$ – dx, $x_0$ + dx) la fonction f(x) peut être approchée par une série de Taylor:




$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(\delta x)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\cdot(\delta x)^n + \ldots =$$

$$= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\cdot(\delta x)^n$$

Comme δx = petit, $\lim_{n\to\infty} (\delta x)^n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\delta x$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\delta x$$

$$\delta f(x) = f'(x_0)\cdot\delta x \qquad / \ ()^2$$

# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDERURS INDIRECTES

Fonction d'une seule variable: y = f(x)

Admettons, que nous avons effectué la mesure de x n fois.

Pour chacune de valeurs de x, nous effectuons le calcul de δf(x).

La valeur espérée (moyenne) des résultats sera:

$$(\delta\ f(x))^2 = (f\,'(x_0))^2 \cdot (\delta x)^2 \qquad / \ \mathrm{E}(\,)$$

$$E\left((\delta\ f(x))^2\right) = (f\,'(x_0))^2 \cdot E\left((\delta x)^2\right)$$

$$\sigma^2(f) = (f\,'(x_0))^2 \cdot \sigma^2(x)$$

Passons aux incertitudes... $\sigma^2 f, \sigma^2 x \to (\Delta f)^2, (\Delta x)^2$

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{(f\,'(x_0))^2 \cdot (\Delta x)^2}}$$

estimation statistique de l'incertitude

# Estimation d'incertitude de type A.

## GRANDERURS INDIRECTES

Fonction de plusieurs variables: $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$

$$\partial f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \delta x_i \qquad /()^2$$

$$\vdots$$

$$\sigma^2(f) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma^2(x_i)$$

Passons aux incertitudes... $\sigma^2 f, \sigma^2 x_i \rightarrow (\Delta f)^2, (\Delta x_i)^2$

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}$$

estimation statistique de l'incertitude

Loi de propagations des variances

# TD 3. Calcul d'incertitudes.

1. Sachant que la période d'un phénomène est égale à $T \pm \Delta T$, calculer la fréquence de ce phénomène et son incertitude.

2. Dans le montage de pont de Wheatstone on détermine la valeur d'une résistance inconnue X à partir de la formule

$$X = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

ou $R_1$, $R_2$, $R_3$ sont connues avec des incertitudes respectives $\Delta R_1$, $\Delta R_2$, $\Delta R_3$. Déterminer la valeur de $\Delta X$.

3. Pour déterminer la distance focale d'une lentille convergente on réalise sur le banc optique un montage comprenant une source de lumière éclairant un objet, la lentille en question et l'écran. La distance objet-écran (image) est constante et égale $D \pm \Delta D$. On trouve l'image nette sur l'écran quand la distance objet-lentille est égale $p \pm \Delta p$. On détermine alors la distance focale de la lentille de la formule

$$\frac{-1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Calculer l'incertitude $\Delta f$.

**4.** Selon la loi de Cauchy le coefficient de réfraction d'une substance dépend de la longueur d'onde lumineuse qui l'éclairé selon la formule

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Calculer le $\Delta$n sachant que la valeur de la longueur d'onde et l ± $\Delta$ l, et que les constantes A et B sont connues à 1% près.

**5.** La densité relative du liquide  par rapport au liquide  est donne par la formule

$$d = \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0}$$

ou les quantités $m_1$, $m_2$, $m_0$ sont détermines avec des incertitudes $\Delta m_1$, $\Delta m_2$ et $\Delta m_0$. Calculer l'incertitude $\Delta$d.

**6.** Calculer l'incertitude du coefficient de dilatation d'un liquide, donnée par la formule

$$\alpha = \frac{(m_2 - m_0)(1 + kt) - (m_1 - m_0)}{(m_1 - m_0)t}$$

**7.** Le bilan thermique dans une expérience calorimétrique a la forme

$$IUt = mc(\theta_f - \theta_i) + \mu \cdot (\theta_f - \theta_i)$$

Calculer $\mu$ et $\Delta\mu$, tenant compte des incertitudes de toutes les variables apparaissant dans cette formule.

# Annexe 1. Expression d'un résultat de mesure.

- Pour les nombres à partie décimale, la virgule (et non le point) sépare la partie entière de la partie décimale.

  **EXEMPLES :** 0,024  1,35  679,8

- Si un nombre a plus de quatre chiffres, chaque groupe de trois chiffres doit être séparé par un espace.

  **EXEMPLES** : 6545 ou 6 545 ; 72 840 ;  1 459 362

  La séparation n'existe pas pour les nombres de quatre chiffres désignant une date ou un millésime (l'an 2000).

- Pour un nombre avec parties entière et décimale, la séparation se fait de part et d'autre de la virgule.

  **EXEMPLES** : 0,078 65  ;  1 432,315 8

- Les grands et les petits nombres peuvent s'exprimer à l'aide des puissances de 10.

  En notation "scientifique", un chiffre différent de zéro se trouve devant la virgule

  **EXEMPLES** : 12 400 = $1,24 \times 10^{4}$  ;  0,000 034 27 = $3,427 \times 10^{-5}$

  En notation "ingénieur", l'exposant est un multiple de 3.

  **EXEMPLES** : 12 400 = $12,4 \times 10^{3}$  ;  0,000 034 27 = $34,27 \times 10^{-6}$

# Annexe 1. Expression d’un résultat de mesure.

La précision d'une mesure d'un phénomène physique se traduit dans l'expression du résultat par le nombre de chiffres significatifs.

**EXEMPLES :**

- la mesure m = 125,7 g (quatre chiffres significatifs) indique une mesure de la masse avec une précision au 1/10 de gramme.
- si le résultat est exprimé par m' = 125,700 g (avec 6 chiffres significatifs), la précision est connue au milligramme près.
- un résultat de mesure de 42,3 cm (trois chiffres significatifs) suggère l'intervalle de certitude suivant : 42,25 cm < 42,3 cm < 42,35 cm.
- si des mesures expérimentales ont conduit aux résultats suivants :
  42,27 cm - 42,45 cm - 42,72 cm avec trois chiffres significatifs,
  nous obtenons respectivement : 42,3 cm - 42,5 cm et 42,7 cm suivant la règle :
  on arrondit par défaut si le premier chiffre supprimé est inférieur à 5
  et par excès s'il est supérieur ou égal à 5.

# Annexe 2. Les chiffres significatifs.

La précision d'un résultat n'est pas corrélée au nombre maximum de chiffres après la virgule, obtenu par une calculatrice électronique !!!!

- La précision d'une mesure d'un phénomène physique se traduit dans l'expression du résultat par le nombre de chiffres dits "significatifs".
- Les chiffres significatifs sont :
  - les chiffres différents de zéro.
  - les zéros placés entre les chiffres.
  - les zéros placés derrière les autres chiffres quand ils sont le résultat de la mesure.

**EXEMPLE** : (les chiffres significatifs sont en rose)

2 ; 45 ; 0,203 ; 0,004 57

$7{,}30 \times 10^{3}$ ; $40{,}700 \times 10^{6}$

42 300 environ ou $42{,}3 \times 10^{3}$

300 m (mesuré au m près)

600 000 habitants environ

600 000 habitants exactement

# Annexe 2. Les chiffres significatifs.

## Addition - Soustraction

- Les résultats de mesures sont des nombres entiers :
  on effectue les opérations habituelles de somme et de différence :
- Les résultats de mesures exprimés à l'aide de puissance positives de 10.
  Ramener tous les résultats de mesures en fonction de la plus haute puissance de 10 avant de procéder au calcul.

  **EXEMPLE**: $S = 3{,}1 \times 10^3 + 5{,}46 \times 10^4 + 7{,}8 \times 10^5$

  $S = 0{,}031 \times 10^5 + 0{,}546 \times 10^5 + 7{,}8 \times 10^5$ (n = 1)

  $S = 0{,}03 \times 10^5 + 0{,}55 \times 10^5 + 7{,}8 \times 10^5$

  $S = 8{,}38 \times 10^5$ arrondi à $8{,}4 \times 10^5$

- Les résultats de mesures sont des nombres avec chiffres décimaux :
  - parmi les résultats de mesures, repérer celui qui possède le plus petit nombrede chiffres significatifs après la virgule : soit n ce nombre
  - arrondir tous les autres nombres à (n+1) chiffres après la virgule.
  - effectuer les opérations d'addition ou de soustraction.
  - arrondir le résultat à n chiffres après la virgule.

**EXEMPLE:** S = 12,452 7 + 4,37 + 450,321 + 21,145 ( n = 2)

S = 12,452 + 4,37 + 450,321 + 21,145

S = 488,289 arrondi à 488,29

# Annexe 2. Les chiffres significatifs.

**<u>Multiplication - Division</u>**

- Dans les résultats de mesures, considérer celui qui possède le plus petit nombre de chiffres significatifs : soit n ce nombre.
  - arrondir tous les autres nombres à (n+1) chiffres.
  - effectuer les opérations de multiplication ou de division.
  - arrondir le résultat pour la multiplication à :
    - → (n) chiffres si la dernière somme partielle est inférieure à 9.
    - → (n+1) chiffres si la dernière somme partielle est supérieure à 9.

- La réponse doit contenir autant de chiffres significatifs que la grandeur mesurée, sauf si une puissance ou une racine intervient dans une opération;
  auquel cas on augmente d'unité le nombre de chiffres significatifs de résultat.

**EXEMPLES** : $(5{,}275)^2 = 27{,}825\,625$ arrondi à $27{,}83$

$(5{,}275)^5 = 4084{,}25$ arrondi à $4{,}084 \times 10^3$

$\sqrt{52{,}75} = 7{,}262\,919\,5$ arrondi à $7{,}263$

$\sqrt[5]{5{,}27} = 1{,}394\,318\,9$ arrondi à $1{,}39$

# Annexe 3. Coefficients numériques.

- La multiplication ou la division par un coefficient numérique doit conduire à un résultat avec un nombre de chiffres significatifs comparable à celui du résultat de la mesure qui en possède le moins.

  **EXEMPLES:** Pour un résultat de mesure de 31,2 (n = 3) nous obtenons :

  3 × 31,2 = 93,6 (n = 3)

  4 × 31,2 = 124,8 (n + 1 = 4) car le dernier produit (4 × 3 )est supérieur à 9.

  La moyenne de plusieurs résultats de mesures conduit à :

  $$M = \frac{42{,}39 + 42{,}1 + 42{,}732}{3} = \frac{127{,}222}{3}$$

  donc M = 42,407 333 arrondi à 42,4

- Dans le cas d'opérations avec les nombres transcendants (p) et (e), leurs expressions dans les calculs dépendront des chiffres significatifs des résultats de mesures.

  **EXEMPLE:** On donne le rayon R = 1,15cm et la hauteur h = 2,5 cm d'un cône de révolution. Le volume de ce cône est calculé en prenant : $\pi$ = 3,14 car n = 2 pour la hauteur, d'où

  $$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times (1{,}15)^2 \times 2{,}5$$

  donc V = 3,460 541 7 arrondi à 3,5cm$^3$ .