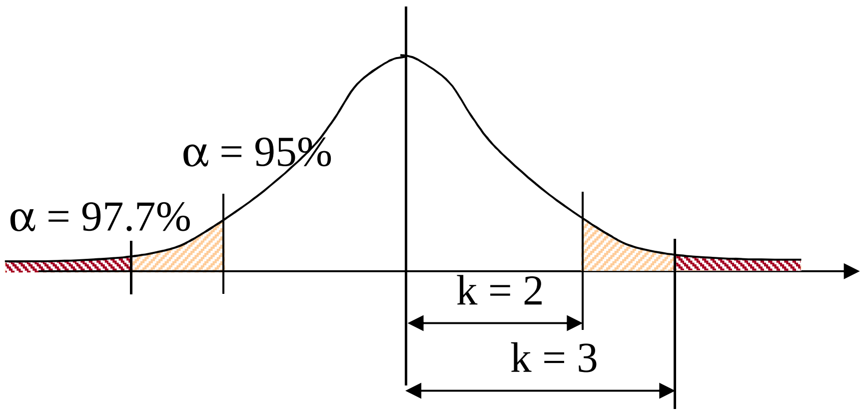
UNIVERSITÉ • MONTPELLIER •

Cours no.3.
Qualités des instruments de mesure.



Variabilité des résultats de mesure (les ‘5M’).

Moyen (l’instrument, matériel)

- justesse (défaut d’étalonnage)
- fidélité
- erreur de la mobilité ou la dérive

Méthode (ou principe de mesurage)

- difficulté de mise en œuvre des instruments (volume, poids, encombrement
- difficultés dues au mode opératoire

Matière (l’élément à mesurer, le mesurande)

- déformation élastique
- état de surface
- homogénéité

Main d’oeuvre (l’opérateur)

- erreur de lecture (interpolation, interprétation...)
- variabilité de positionnement ou de pression de contact
- formation et expérience (compétence) de l’opérateur

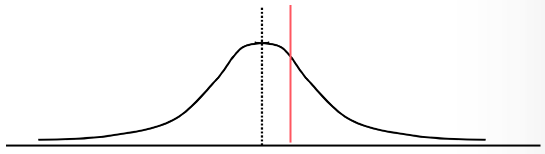
Milieu (l’environnement de l’opération de mesurage)

- température, champs magnétique, hygrométrie,, vibrations...
- variations de la tension d’alimentation

Qualités des instruments de mesure.

justesse

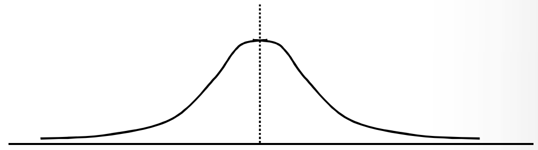
aptitude d'un instrument
à donner des indications
exemptées des erreurs systématiques
(centres autour de la valeur exacte x_0)



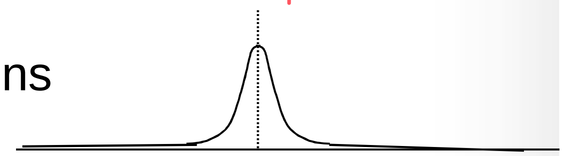
x_0
instrument non juste

fidélité

aptitude d'un instrument
à donner des indications
très voisines lors de mesurage répètes,
dans (apparemment) les mêmes conditions



instrument peu fidèle



instrument fidèle

précision

justesse + fidélité

Qualités des instruments de mesure.

classe de précision

définie la précision avec laquelle la graduation des instruments est faite

$$classe = \frac{incertitude}{etendue\ de\ l'echelle}\ [\%]$$

EXEMPLE: *si la classe d'un voltmètre est 1.5, et l'échelle totale est de 150 mV, alors incertitude d'une mesure sur cette échelle est de:*
150 mV × 1.5% = 2.25 mV
(la même pour toutes les valeurs mesurées sur cette échelle)

sensibilité

l'accroissement de la réponse de l'instrument par rapport à l'accroissement du signal d'entrée:

$$sensibilit\,e = \frac{etendue\ de\ l'echelle\ de\ lecture}{etendue\ des\ variation\ a\ mesurer}$$

EXEMPLE: *le voltmètre comporte 150 divisions. Sa sensibilité S est égale:*

sur le calibre 150 mV

$$S = \frac{150\ \text{div}}{150\ \text{mV}} = 1\ \text{div/mV}$$

sur le calibre 15 V

$$S = \frac{150\ \text{div}}{15\ \text{V}} = 10\ \text{div/V}$$

Qualités des instruments de mesure.

mobilité	la plus grande variation du signal qui ne provoque pas une variation détectable de réponse de l'appareil. (la plus petite variation qui peut être décelée par le dispositif).
discrétion	aptitude d'un instrument à ne pas modifier le mesurande.
temps de réponse	intervalle de temps séparant le moment ou le signal d'entrée subit un changement brusque et le moment où le signal de sortie atteint sa valeur finale et s'y maintie
dérive	défaut d'un instrument de mesure, consistant en variation lente d'une de ses caractéristiques métrologiques.

A RETENIR: quelles que soient les performances de la chaîne des mesures ils n'existent pas des mesures sans incertitudes!

Evaluation d'incertitude.

incertitude de type A

évaluation statistique, basée sur une série d'observations, de validité de mesurages.

répétabilité : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs dans les mêmes conditions de mesure

reproductibilité : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs dans les conditions de mesure variées

incertitude de type B

évaluation scientifique (mais personnelle) utilisant toutes les informations possibles sur les causes de la variation de détermination du mesurande:

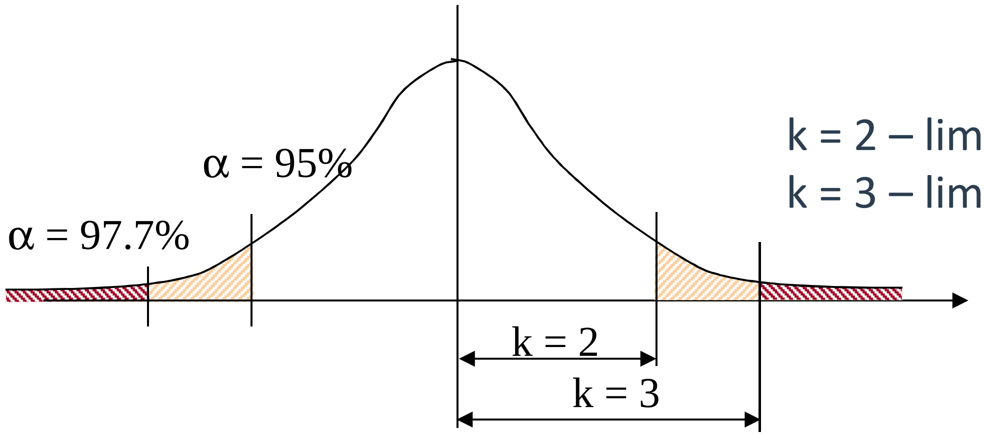
- résultats des mesurages antérieurs;
- propriétés des matériaux et instruments utilises;
- données d'étalonnage;
- incertitudes sur les données de référence.....

Incertitude élargie.

Pour certaines application commerciales, industrielles ou réglementaires
il est possible d'utiliser une incertitude élargie, étant un multiple de l'écart type.

Le choix de la valeur du facteur multiplicatif dépend de niveau de confiance
que nous voulons accorder à l'intervalle $(x - \Delta x; x + \Delta x)$

Chaque fois que cela est possible, le niveau de confiance
doit être estimé et indiqué;



k = 2 – limite de surveillance (α = 95%)
k = 3 – limite de contrôle (α = 99.7%)

Evaluation d'incertitude de type B.

1 la valeur x est donnée par la spécification du constructeur, et l'incertitude Δx est donnée comme un multiple k de l'écart type:

$$x \rightarrow x \pm \frac{\Delta x}{k}$$

EXEMPLE: *la longueur d'une barre est de 1.6225 m, et l'incertitude sur cette valeur est 0.0024 m au niveau de deux écarts-type:*

x = (1.6225 ± 0.0012) m

2 si la valeur x est fournie avec un intervalle correspondant à un certain niveau de confiance, on se sert du tableau donnant la valeur des facteurs multiplicatifs:

niveau de confiance en % $\rightarrow$ facteur multiplicatif

45.1 %	$\rightarrow$ 0.6	90 %	$\rightarrow$ 1.65
51.6 %	$\rightarrow$ 0.7	95 %	$\rightarrow$ 1.96
57.6 %	$\rightarrow$ 0.8	95.5 %	$\rightarrow$ 2.00
63.7 %	$\rightarrow$ 0.9	99 %	$\rightarrow$ 2.58
68.3 %	$\rightarrow$ 1	99.7 %	$\rightarrow$ 3.00

EXEMPLE: *la longueur d'une barre est de (1.6225 ± 0.0031) m au niveau de confiance 99% . Cette barre mesure donc*

x = (1.6225 ± 0.0031/2.58) m

= (1.6225 ± 0.0012) m

Evaluation d'incertitude de type B.

3 Si on peut estimer qu'il y a y une chance sur n pour que la valeur x soit comprise entre x_{min} et x_{max}, alors

$$x = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$$

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2k}$$

k- facteur multiplicatif correspondant au niveau de confiance 100%/n

EXEMPLE: *il y a deux chances sur trois pour que la longueur d'une barre se situe entre 1.6213 m et 1.6237 m*

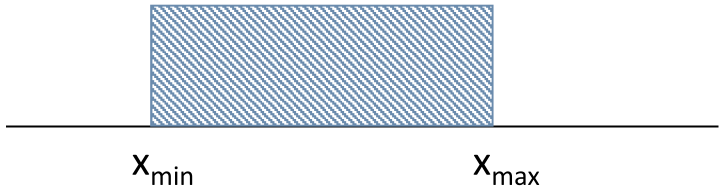
$$x = \frac{1.6213 + 1.6237}{2} = 1.6225\ m$$

$$\Delta x = \frac{1.6237 - 1.6213}{2 \cdot 1} = 0.0012\ m$$

Evaluation d'incertitude de type B.

4

Si on ne peut estimer que des limites dans lesquels se trouve la valeur de x tout en étant sur, qu'elle ne se trouve pas en dehors de ces limites, (loi rectangulaire), alors



$$x = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$$

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

EXEMPLE: *on lit sur un voltmètre de classe 1.5 sur le calibre de 150 V (qui comporte 150 graduations) la valeur 104 et on estime que la précision de la lecture est d'une demi-division:*

$$a = (1.5\% \cdot 150 + 0.5 \cdot 150 / 150) = 2.75 \text{ V}$$

x = 104 V

$$\Delta x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2.75}{\sqrt{3}} = 1.6 \text{ V}$$

Qu’est-ce qu’est statistique?

- Définition « à la française » (d’après « Petit Robert ») :

  «….. l’ensemble des techniques d’interprétation mathématique
  appliqué à des phénomènes
  pour lesquels une étude exhaustive de tous les facteurs est impossible,
  à cause de leur grand nombre ou de leur complexité.... »

- Définition « à l’américaine » :

« ... Science de **rassembler**, **organiser** et **analyser** des données,
et de **tirer de conclusions** sur les informations cachées dans les données. »

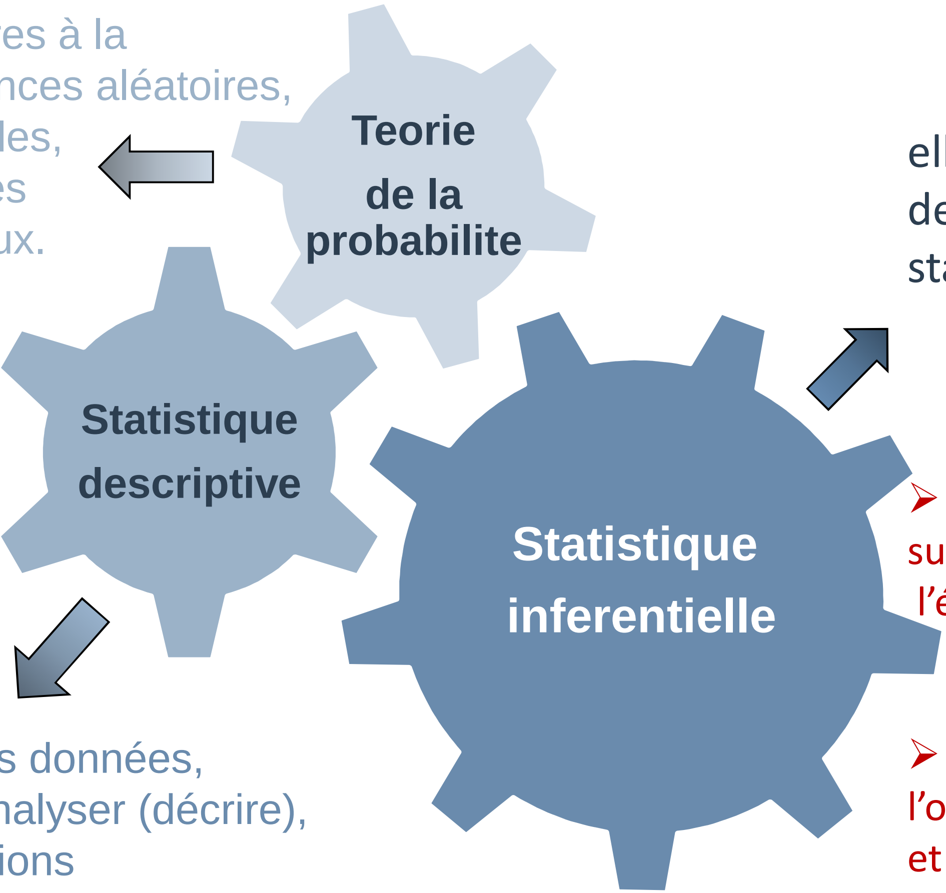
Souvent, ces conclusions sont formulées sous forme des prédictions,
d’où leurs extrême importance.

Quoi qu’il en soit, statistiques c’est…

l’ensemble des concepts et des méthodes
développés pour l’étude des phénomènes
apparemment NON DETERMINISTES (STOCHASTIQUES).

Domaines de la statistique.

des concepts nécessaires à la
description des expériences aléatoires,
construction des modèles,
étude de leurs propriétés
et des relations entre eux.



elle tire des conclusions
de résultats récoltés par
statistique descriptive:

- formule des conclusions sur populations à partir de l'étude des échantillons

- vérifie l'adéquation entre l'observation (réalité) et son description (modèle théorique)

méthodes de récolter des données,
les grouper, classer et analyser (décrire),
sans tirer des conclusions
de cette étude.

Probabilité (rappels).

Le concept de probabilité s'appuie sur la notion de l'expérience aléatoire.

experience aléatoire

répétée dans des conditions apparemment identiques, conduit à des résultats différents et non-prévisibles.

(mise en œuvre d'un phénomène non-déterministe).

évènement

résultat d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des tous les résultats possibles Ω =

= l'ensemble fondamental.

probabilité: déf. classique

On répète une expérience aléatoire **n** fois.
L'événement **A** s'est produit k fois.
Probabilité de l'événement **A** est définie comme

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Propriétés élémentaires :

$\Rightarrow$ $0 \leq P(A) \leq 1$;

$\Rightarrow$ $P(\Omega) = 1$

$\Rightarrow$ si les événements A_i sont disjoints,

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Probabilité (rappels).

Exemple 1: *Quelle est la probabilité de faire un 7 en jetant 2 dès?*

Il y a 6x6 = 36 résultats possibles

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Événement « on a fait un 7 » peut survenir à 6 façons différentes

$$P("7") = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Exemple 2: *On a jeté* ***1000*** *fois une pièce.*
On a obtenu “pile” ***587*** *fois.*
Donc la probabilité d’obtenir “pile”

$$P(pile) = \frac{587}{1000} = 0.587$$

On a jeté ***1000*** *fois une pi èce.*
On a obtenu “pile” ***523*** *fois.*
Donc la probabilité d’obtenir “pile”

$$P(pile) = \frac{523}{1000} = 0.523$$

?

$$P(pile) = \frac{587 + 523}{1000 + 1000} = 0.555$$

Théoriquement, la probabilité d’obtenir “pile” en lançant une pièce est de ½

Probabilité: définition statistique (empirique).

On répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois.
A chaque fois, l'événement **A** s'est produit **k_i** fois.

Probabilité statistique (empirique) de l'événement **A** est égale à la fréquence d'apparition de cet événement quand le nombre d'observations (mesures) est très grand:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{n}$$

La définition classique de la probabilité est donc la limite de probabilité statistique quand le nombre d'observations tend vers l'infini.
(loi de grands nombres)

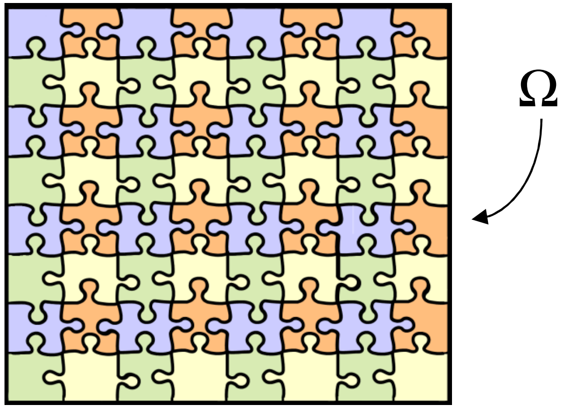
Systèmes d'évènements.

Prenons des événements $A_1, A_2, \dots A_n$

$$\Rightarrow \quad \text{si } \forall(i, j) \;\; A_i \neq A_j \text{ et } A_i \cap A_j = \varnothing$$

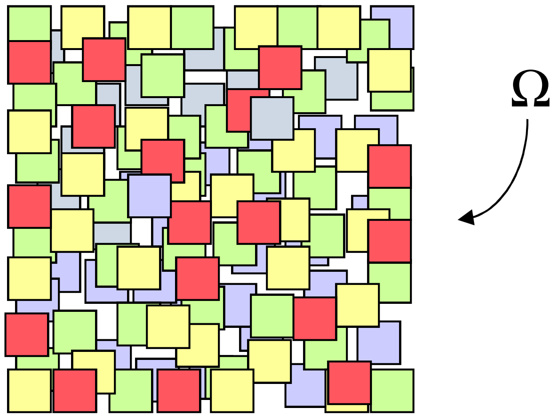
$$\Rightarrow \quad \text{si } A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

alors A_i forment un système complet d'événements.



système complet d'événements

Un système complet d'événements constitue en même temps un système fondamental.



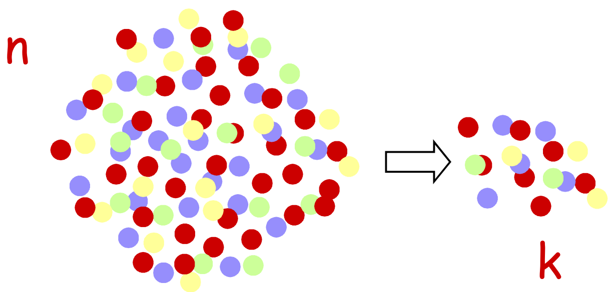
système fondamental

Un système fondamental d'événements n'est pas toujours un système complet.

Analyse combinatoire.

Situations sans répétition et sans ordre.

combinaison : tirage de k éléments d'un ensemble de n éléments, d'un seul coup.



$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propriétés :

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

EXEMPLE : *Combien y a-t-il de combinaisons possibles de lotto dans lequel on demande de choisir 7 nombres parmi 49?*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_{49}^7 = \frac{49!}{7!\,42!} = \frac{43\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 85\,900\,584$$

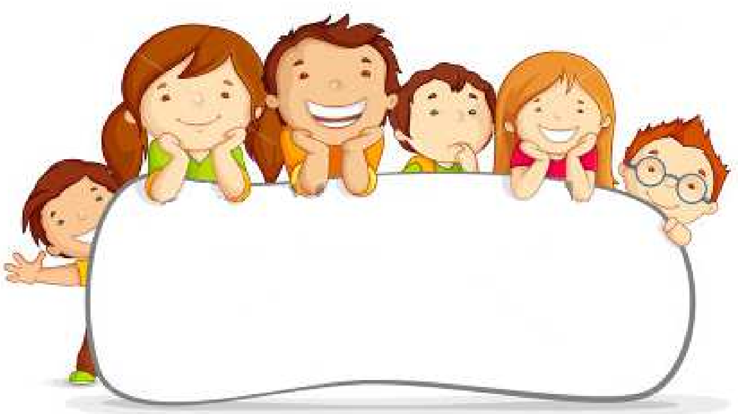
Analyse combinatoire.

Situations sans répétition mais avec ordre.

permutation : tirage de tout l'ensemble de **n** éléments, l'un après l'autre.

$$P^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

EXEMPLE : *A combien façons différentes peut-on mettre un groupe de 6 enfants en ligne?*

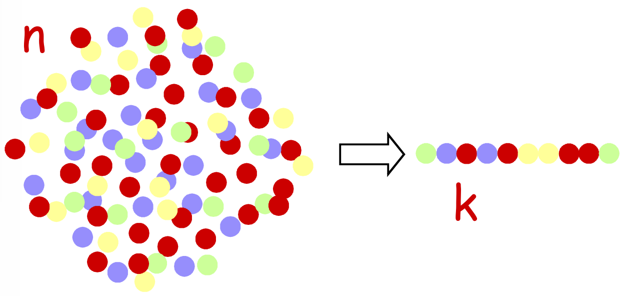


$$P^6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Analyse combinatoire.

Situations sans répétition mais avec ordre.

arrangement tirage de k éléments d'un ensemble de n éléments, l'un après l'autre.



$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

un arrangement est
une combinaison avec permutations :

$$A_n^k = C_n^k \cdot P^k$$

EXEMPLE : *Combien peut-on écrire des nombres à 3 chiffres en utilisant les cartes montrées ci-dessous?*

❶	❷	❸
❹	❺	❻

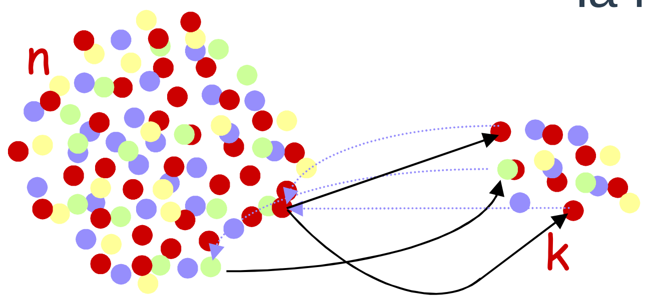
$$A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

Analyse combinatoire.

Situations avec répétition mais sans ordre.

combinaison avec répétition

tirage de k éléments d'un ensemble de n éléments; avant le tirage suivant, on rend l'élément choisi à l'ensemble, pour qu'il puisse être choisi la fois suivante.



$$K_n^k = C_{n+k+1}^k = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!}$$

EXEMPLE : *Combien peut-on écrire des nombres à 3 chiffres en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6?*

$$K_6^3 = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = 120$$

Analyse combinatoire.

Situations avec répétition et avec ordre.

variation

arrangement avec répétitions :

$$V_n^k = n^k$$

EXEMPLE : *Combien y a-t-il des résultats possibles si on jette une fois 3 dés ?*

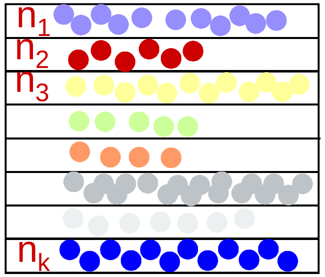
$$V_6^3 = 6^3 = 216$$

permutation avec répétition

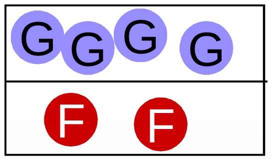
un ensemble comprend n éléments de k types ; les éléments d'un type (n_i) sont indiscernables .

$$P_{repet}^{n} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(n_i)!}$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$



EXEMPLE : *une famille a 6 enfants: 4 garçons et 2 filles. Combien y a-t-il des ordres de naissances différents possibles?*



$$P_{repet}^{6} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$