

Lecture n° 2.

Introduction to inferential statistics.



"There are lies, damn lies, and statistics. We're looking for someone who can make all three of these work for us."

Tests statistiques.

Supposons qu'une entreprise souhaite mettre sur le marché un nouveau type de lessive.

Avant de la proposer à l'ensemble de la population, une série d'essais sont effectués. Ils visent à observer l'efficacité du produit sur un groupe de clients potentiels, en le comparant éventuellement à l'efficacité d'autres produits.

Pour simplifier, supposons que :

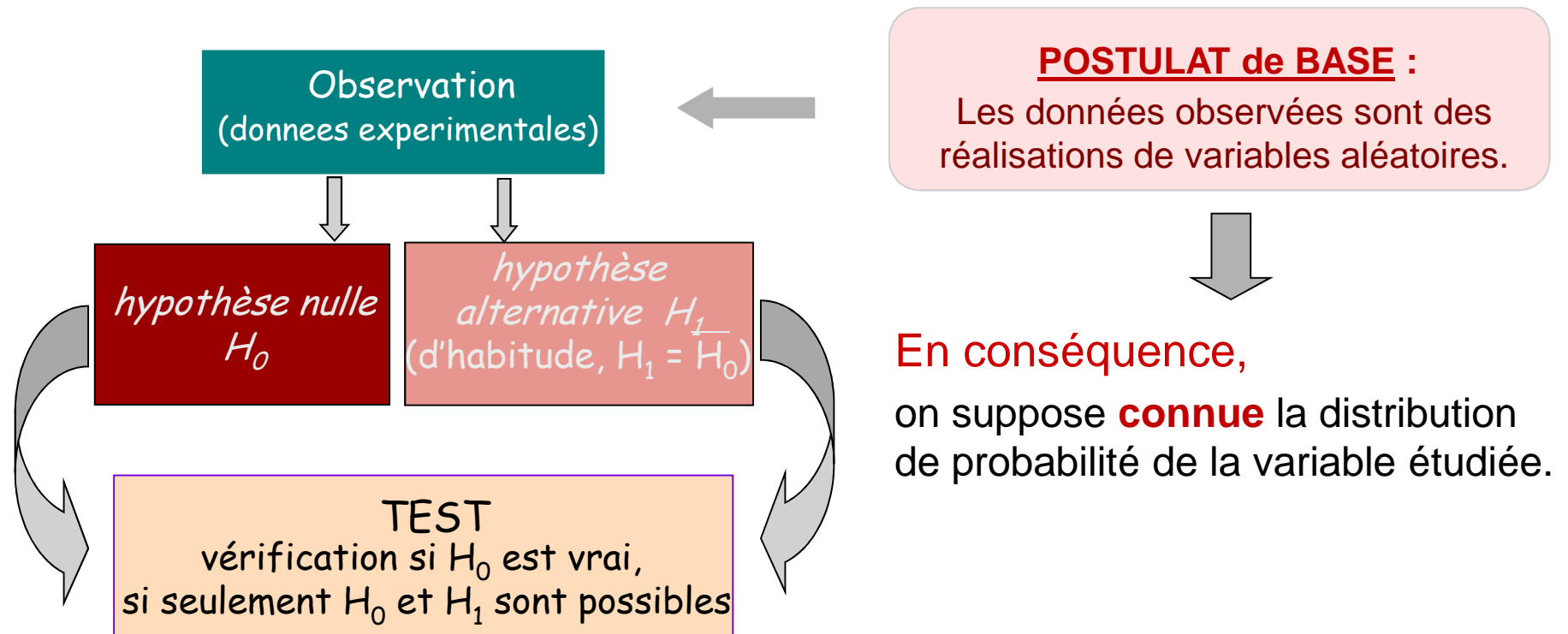
- le nouveau produit ait satisfait 87 clients dans un premier groupe de 100,
- alors que le produit traditionnel a satisfait 74 clients sur les 100 d'un groupe témoin.

PROBLEME:

L'amélioration d'efficacité est-elle suffisante pour lancer le produit sur le marché ?

Les tests statistiques sont utilisés dans l'interprétation des résultats expérimentaux, quand **il faut faire un choix** entre plusieurs hypothèses possibles **sans disposer d'informations suffisantes** pour que le choix soit sûr.

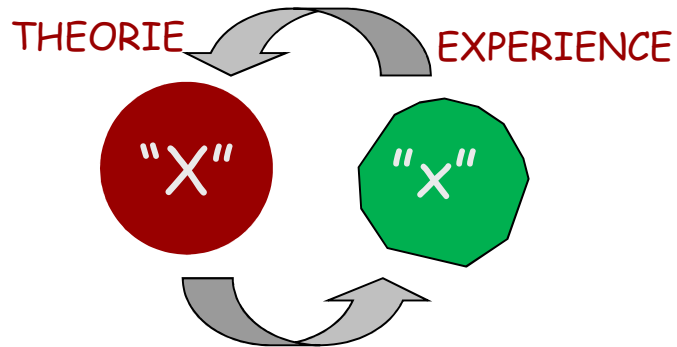
Principes d'un test.



En statistique les théories sont des modèles probabilistes,
qui en général ne peuvent pas être réfutés :
aucun résultat observé n'est jamais totalement incompatible avec le modèle.

L'objet des tests statistiques est de **distinguer**
ce qui est **plausible** de ce qui est trop **peu vraisemblable**.

Méthode.



- on construit (**modélisation !!!**) une variable aléatoire **X** dont on connaît la distribution quand H_0 est vraie ;
- on calcule la valeur de $X(= x)$ à l'issue de l'expérience ;
- on compare la valeur expérimentale **x** avec la valeur théorique **X** de notre modèle (sous H_0).

LE TEST de SEUIL :

Le seuil α est la probabilité , fixée *a priori*, que le test rejette l'hypothèse H_0 à tort.

$$P(\text{rejet de } H_0) = \alpha$$

La tradition affecte aux réels α prioritairement les valeurs 0.05 et 0.01.

Il faut donc lire α comme 'une faible probabilité'.

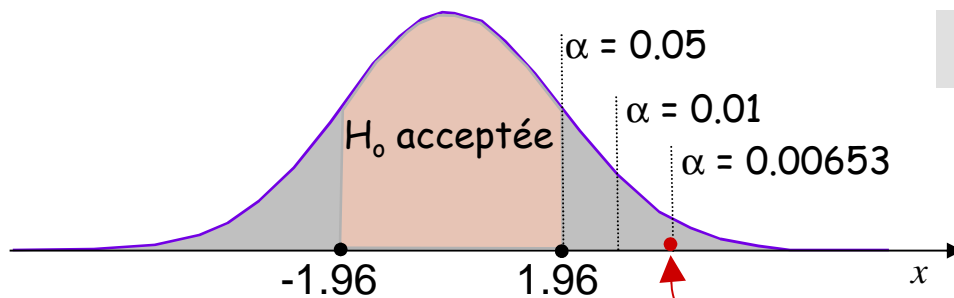
Un test de seuil pour l'hypothèse est donc une statistique binaire (rejet ou non de H_0).

Seuil limite – la p-valeur.

On préfère souvent avoir l'information quel est **le seuil limite** auquel H_0 aurait été rejetée, compte tenu de l'observation.

EXEMPLE (fréquent):

sous l'hypothèse H_0 la variable X de test suit la loi normale. La règle de rejet pour le test bilatéral de seuil $\alpha = 0.05$ est :



Rejet de $H_0 \rightarrow X \notin [-1.96 ; 1.96]$

Supposons que la valeur prise par X soit 2.72.

L'hypothèse sera donc rejetée.

Mais elle serait également rejetée au seuil 0.01.

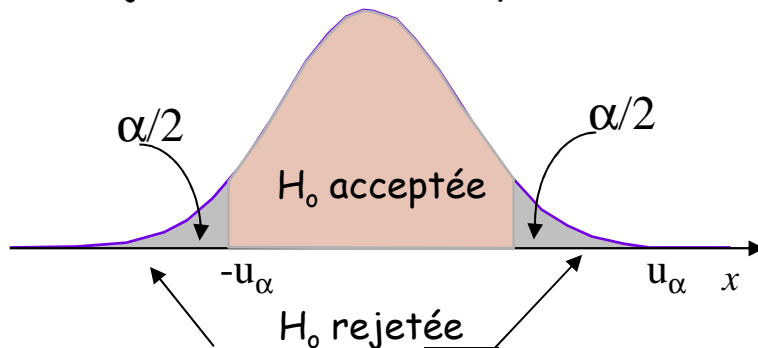
En fait elle serait rejetée pour n'importe quel seuil supérieur à 0.00653.

Dans ce cas , **p-valeur = 0.00653**

Règles de décision.

TEST BILATERAL :

(rejet des valeurs trop écartées)

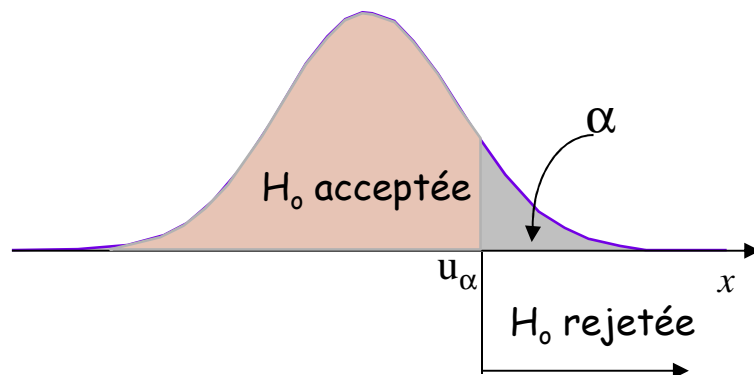


➔

Selon spécifications, chaque comprimé d'un certain médicament doit contenir 2.5 g de substance active. 100 comprimés choisis au hasard contiennent en moyenne 2.6 g de substance active, avec un écart type 0.4. Peut-on dire que la production respecte les spécifications ?

TEST UNILATERAL :

(rejet des valeurs trop grandes ou trop petites)



➔

Le pourcentage des individus présentant des rides est de 25%. Après un traitement antirides, on a observé que 40 personnes sur 200 avaient des rides. Peut-on dire que le traitement est efficace ?

Conformité ou homogénéité?

TESTS STATISTIQUES :

←

TESTS de CONFORMITE

comparaison

d'un échantillon à une loi théorique.

H_0 - différences observées sont dues
à des fluctuations d'échantillonnage.

↘

TESTS D'HOMOGENEITE

comparaison

de deux (ou plusieurs) échantillons.

H_0 - les échantillons proviennent de la même population
et les différences entre eux sont dues uniquement
à des fluctuations d'échantillonnage.

Résultat d'un test.

Seulement deux résultats de test sont possibles :

- le résultat de comparaison conduit à **rejeter H_0**
risque de première espèce α
(de se tromper en écartant H_0 quand celle-ci est vraie)
- le résultat de comparaison conduit à **accepter H_0**
risque de deuxième espèce β
(de se tromper en acceptant H_0 quand celle-ci est fausse).

Tests non-paramétriques.

Nous disposons d'un échantillon issu d'une population inconnue .
Les données sont donc des réalisations de variables aléatoires, de même loi .
Cette loi n'est pas supposée appartenir à une famille paramétrique particulière.

Tests non paramétriques sont applicables à tout type de populations
(ne nécessitent pas l'estimation des paramètres μ , σ).

En pratique, les tests non-paramétriques sont utilisés quand:

- les données sont non paramétriques (rangs, appréciations, conventions etc.);
- les populations ne sont pas normalement distribuées;
- les variances dans les populations comparées ne sont pas égales;
- les échantillons sont de petite taille.

Tests paramétriques.

Conditions initiales des tests:

- les données sont des valeurs numériques (autres que codes, rangs, conventions etc.);
- les variables aléatoires étudiées sont des réalisations de la loi normale,
- les variances de la variable étudiée dans les populations qu'on compare sont égales.

L'hypothèse de normalité,
sous laquelle les tests paramétriques sont valides
n'est pas toujours vérifiée,
ni même vérifiable en pratique.



Pour des échantillons de grande taille,
le théorème central limite assure la normalité asymptotique des
distributions empiriques.

Tests statistiques.

non- parametriques

- khi 2
- Mann et Whitney;
- Kruskall et Wallis
- Wilcoxon
- Spermann
-

parametriques

- Tests de comparaison
- Analyse de variance
-

Résultat d'un test.

Réalité

Realite