Lecture n° 6.

Non - parametric tests.

“How close to the truthdo you want to come, sir?”

Tests non - paramétriques.

Nous disposons d'un échantillon issu d'une population inconnue .
Les données sont donc des réalisations de variables aléatoires, de même loi .
Cette loi n'est pas supposée appartenir à une famille paramétrique particulière.

Tests non paramétriques sont applicables à tout type de populations
(ne nécessitent pas l'estimation des paramètres μ, σ).

En pratique, les tests non-paramétriques sont utilisés quand:

- les données sont non paramétriques (rangs, appréciations, conventions etc.);
- les populations ne sont pas normalement distribuées;
- les variances dans les populations comparées ne sont pas égales;
- les échantillons sont de petite taille.

Autres tests non - paramétriques.

- **TEST de MANN et WHITNEY.**
  (comparaison des moyennes
  de deux échantillons indépendants)

Deux groupes d'étudiants, formés à des méthodes péda-gogiques différentes, ont subi le même examen. A l'issue de cet examen, on etablit le classement des copies.

- **TEST de WILCOXON.**
  (comparaison des moyennes
  de deux échantillons appariés)

Un chimiste a mis au point une méthode de dosage du principe actif contenu dans des comprimés Doliprane. Pour la comparer à une méthode de référence, il dose 12 comprimés par les deux méthodes.

- **TEST de KRUSKAL et WALLIS.**
  (comparaison de plusieurs
  moyennes expérimentales)

Pour verifier si l'origine géographique a une influence significative sur la teneur en calcium de l'eau, on a dosé trois types d'eaux issues de trois rivieres différentes. Chaque type d'eau a fait l'objet de quatre prélèvement.

- **TEST de CORRELATION
  de SPEARMAN.**

On considère les classements en mathématiques et en français d'un groupe de 12 élèves. Y a-t-il une corrélation significative entre les résultats obtenus dans ces matières ?

- **TEST du RAPPORT de COTES.**
  (test d'independance
  de deux caracteres)

Sur chaque individu d'une population de taille n, on a etudié la présence ou l'absence de la maladie M et du symptôme S. Peut-on annoncer à un individu qu'il est malade de M si on a constaté le symptôme S sur lui ?

Autres tests non - paramétriques.

L’idée des tests :

Si:

on rassemble les deux échantillons,

et que l'on range les valeurs dans l'ordre,

l'alternance des elements de E_1 et de E_2 devrait être assez régulière.

On aura des doutes sur H_0 si les elements de E_1 sont:

plutôt plus grands que les elements de E_2,

ou plus petits,

ou plus fréquents, dans une certaine plage de valeurs.

Exemple de procédure: test de Mann &Whitney.

(comparaison des moyennes de deux échantillons indépendants)

EXEMPLE 4: Deux groupes de 10 étudiants, formés en utilisant des méthodes pédagogiques différentes, ont subi le même examen.
A l'issue de cet examen, le classement des étudiants était le suivant :

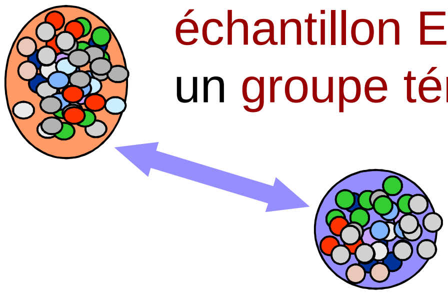
Groupe A : 1, 3, 4, 5, 7, 8, 8ex, 12, 15, 17.

Groupe B : 2, 6, 10, 11, 13, 14, 15ex, 18, 19, 20.

Est-ce que ces méthodes pédagogiques conduisent à des résultats différents?

On veut tester l'effet d'un traitement sur un caractère donné.

On dispose de deux échantillons non exhaustifs, indépendants, de taille n_1 et n_2:



échantillon E_1 de la loi L_1 correspond à un groupe témoin, sans traitement.

échantillon E_2 de la loi L_2 correspond à un deuxième groupe, avec traitement.

PROCEDURE:

- On classe par ordre croissant l'ensemble des valeurs de deux échantillons. A chaque valeur, on attribue son rang dans le classement.

s'il y a des ex-aequo, on attribue à chacun d'éléments le rang égal à la moyenne des rangs qu'ils occupent. ➡

....
rang 5 - x
rang 6 - x
rang 7 - x
rang 8 - x
....

$$\frac{5+6+7+8}{4}=\frac{26}{4}=6.5$$

à chaque élément x on attribue le rang 6.5

- Pour tout élément x_i de E_1, on compte le nombre d'éléments de E_2 situés après x_i dans le classement ;

  $\rightarrow$ on compte 0.5 pour chaque élément de E_2 ex-aequo avec x_i.

- On additionne toutes les valeurs ainsi obtenues : u_1.
- On répète la même procédure pour les éléments de E_2 ; on obtient le nombre u_2.
- On peut vérifier, que $u_1 + u_2 = n_1 \cdot n_2$
- On choisit pour la suite du test la plus petite des valeurs u_1 et u_2 :

$$u = \min(u_1, u_2)$$

Théorème (n_1, n_2 > 20) :

Dans le cas des grands échantillons, sous l'hypothèse H_0, la variable u suit à peu prés la normale N(m, s) avec

$$\mu = \frac{n_1 n_2}{2} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

et la variable Y $\quad Y = \dfrac{u - \mu}{\sigma} \quad$ suit la loi normale centrée réduite.

Les tables de la loi normale donnent la valeur de u_α telle que, sous l'hypothèse H_0, $P(|Y| \geq u_\alpha) = \alpha$:

- si $Y \in (-u_\alpha, u_\alpha) \rightarrow$ on ne peut pas rejeter H_0 ;
- si $Y \notin (-u_\alpha, u_\alpha) \rightarrow$ on écarte H_0 avec le risque α.

Théorème (n_1, $n_2 \leq 20$) :

Les tables de Mann et Whitney donnent, en fonction de n_1, n_2 et du coefficient a choisi, la valeur de n_α telle que, sous l'hypothèse H_0 , $P(u \leq n_\alpha) = \alpha$

- si $u > n_\alpha$, on ne peut pas rejeter H_0 ;
- si $u \leq n_\alpha$, on écarte H_0 avec le risque α

EXEMPLE 4: Deux groupes de 10 étudiants, formés à des méthodes pédagogiques différentes, ont subi le même examen. A l'issue de cet examen, le classement des étudiants était le suivant :

Groupe A : 1, 3, 4, 5, 7, 8, 8ex, 12, 15, 17.

Groupe B : 2, 6, 10, 11, 13, 14, 15ex, 18, 19, 20.

Est-ce que ces méthodes pédagogiques conduisent à des résultats différents?

1	→ 10
2	→ 9
3	→ 9
4	→ 9
5	→ 9
6	→ 6
7	→ 8
8.5	→ 8
8.5	→ 8
10	→ 3
11	→ 3
12	→ 6
13	→ 2
14	→ 2
15.5	→ 3.5
15.5	→ 1.5
17	→ 3
18	→ 0
19	→ 0
20	→ 0

$u_1 = 10 + 9 + 9 + 9 + 8 + 8 + 8 + 6 + 3.5 + 3 = 73.5$

$u_1 = 9 + 6 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1.5 = 26.5$

$u_1 + u_2 =$
$= 26.5 + 73.5 =$
$= n_1 \times n_2 = 100$

$u = \min(u_1, u_2) = 26.5$

Hypothèse H_0 : les deux méthodes conduisent à des résultats statistiquement identiques.

Les tables de Mann et Whitney donnent:

$n_1 = 10$
$n_2 = 10$
$\alpha = 0.05$

$n_\alpha = 23$

$u > n_\alpha$

Sous l'hypothèse H_0, $P(u \leq n_\alpha) = \alpha$

Conclusion : au risque α, l'hypothèse H_0 ne peut pas être rejetée ; les deux méthodes pédagogiques conduisent à des résultats statistiquement identiques.

EXEMPLE 4: Deux groupes de 10 étudiants, formés à des méthodes pédagogiques différentes, ont subi le même examen. A l'issue de cet examen, le classement des étudiants était le suivant :

Groupe A : 1, 3, 4, 5, 7, 8, 8ex, 12, 15, 17.

Groupe B : 2, 6, 10, 11, 13, 14, 15ex, 18, 19, 20.

Est-ce que ces méthodes pédagogiques conduisent à des résultats différents?

1	→ 10
2	→ 9
3	→ 9
4	→ 9
5	→ 9
6	→ 6
7	→ 8
8.5	→ 8
8.5	→ 8
10	→ 3
11	→ 3
12	→ 6
13	→ 2
14	→ 2
15.5	→ 3.5
15.5	→ 1.5
17	→ 3
18	→ 0
19	→ 0
20	→ 0

Hypothèse H_0 : les deux méthodes conduisent à des résultats statistiquement identiques.

$u_1 = 10 + 9 + 9 + 9 + 8 + 8 + 8 + 6 + 3.5 + 3 = 73.5$

$u_2 = 9 + 6 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1.5 = 26.5$

$u_1 + u_2 = 26.5 + 73.5 = n_1 \times n_2 = 100$

$u = \min(u_1, u_2) = 26.5$

Les tables de Mann et Whitney donnent:

$n_1 = 10$
$n_2 = 10$
$\alpha = 0.05$

$n_\alpha = 23$

$u > n_\alpha$

Sous l'hypothèse H_0, $P(u \le n_\alpha) = \alpha$

Conclusion : au risque α, l'hypothèse H_0 ne peut pas être rejetée ; les deux méthodes pédagogiques conduisent à des résultats statistiquement identiques.